B A D A N I A O P E R A C Y J N E I D E C Y Z J E

Nr 1 2006

Helena GASPARS*

ANALIZA CZASOWO-KOSZTOWA (CPM-COST). ALGORYTM A MODEL OPTYMALIZACYJNY

Za pomocą przykładowych sieci obrazujących realizację przedsięwzięć inwestycyjnych zilustrowano działanie algorytmu opartego na metodzie ścieżki krytycznej w ujęciu kosztowym oraz przedstawiono modele optymalizacyjne wraz z kolejnymi iteracjami wygenerowanymi przez komputer. Na podstawie rozbieżności między otrzymanymi rozwiązaniami wykazano, iż algorytm stosowany w analizie czasowo-kosztowej jest oparty na nie do końca prawidłowo sformułowanych założeniach.

Słowa kluczowe: *CPM-COST, metoda ścieżki krytycznej, analiza czasowo-kosztowa, model optymalizacyjny, czas graniczny, czas dyrektywny, liniowa i nieliniowa zależność pomiędzy czasem a kosztem, czas realizacji przedsięwzięcia*

Wstęp

Już od ponad pół wieku znana jest metoda ścieżki krytycznej (CPM – *Critical Path Method*), powstała w koncernie du Pont de Nemours (USA) jako efekt pracy zespołu różnych specjalistów, którym zlecono opracowanie metody planowania robót remontowych i przeglądowych w dużym zakładzie przemysłu chemicznego[1]. W przeciwieństwie do metod indeterministycznych, zakładających działanie w warunkach niepewności, metoda ścieżki krytycznej należy do grupy metod deterministycznych, czyli takich, które zakładają działanie w warunkach pewności[2]. CPM pozwala wyróż-

* Katedra Badań Operacyjnych, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań. helenagaspars@poczta.onet.pl

[1] Zob. http://www.iwankow.ps.pl/zto/sopt/

[2] Do najpopularniejszych metod indeterministycznych (probabilistycznych, stochastycznych) należy metoda PERT (*Program Evaluation and Review Technique*). PERT traktuje czasy trwania poszczególnych czynności jako zmienną losową. Z kolei CPM można stosować wówczas, gdy czasy te są dokładnie znane. Warto jednak zaznaczyć, że metoda PERT, pod względem struktury logicznej modelu sieciowego, jest zaliczana do metod analizy sieciowej typu DAN (*Deterministic Analysis Network*), ponieważ w trak-

nić w sieci przedstawiającej harmonogram realizacji przedsięwzięcia[3] tzw. ścieżki krytyczne, które charakteryzują się najdłuższym czasem trwania. Od niego z kolei zależy czas potrzebny na wykonanie całej zaplanowanej inwestycji.

Oprócz analizy ilościowej równie ważnym zagadnieniem jest aspekt ekonomiczny realizacji projektu i możliwości modyfikacji modelu przez kompresję sieci, wynikającą ze zbyt długiego dla inwestora lub odbiorcy okresu wykonywania tego projektu [7, s. 165]. Potrzeba przyspieszenia realizacji przedsięwzięcia przy jednoczesnym dążeniu do minimalizacji kosztów bezpośrednich (związanych z konkretną czynnością)[4] pociąga za sobą konieczność stosowania CPM-COST, czyli metody ścieżki krytycznej w ujęciu kosztowym. W metodzie tej zakłada się, iż skróceniu czasu realizacji inwestycji towarzyszy wzrost tychże kosztów. W analizie czasowo-kosztowej można rozpatrywać następujące dwa przypadki [6, s. 55–56]:

a) Decydent dąży do minimalizacji czasu realizacji przedsięwzięcia (T), mając na względzie dostępne środki (K*), które może przeznaczyć na skracanie czasu trwania wybranych czynności:

$$T \to \min, \tag{1}$$

$$K \le K^*. \tag{2}$$

b) Decydent dąży do realizacji inwestycji w czasie nie dłuższym niż zadany czas dyrektywny (T*), przy czym zamierza to uczynić jak najtaniej:

$$K \to \min, \tag{3}$$

$$T \le T^*. \tag{4}$$

Jest rzeczą oczywistą, iż osiągnięcie jednego z powyższych celów wymaga skrócenia czasu trwania czynności, znajdujących się na najdłuższej ścieżce w sieci. Należy jednocześnie pamiętać o tym, aby ostateczny czas trwania danego działania był przynajmniej równy jego czasowi granicznemu[5].

---

cie realizacji przedsięwzięcia wszystkie czynności przedstawione w sieci są realizowane. W przypadku stochastycznej struktury logicznej tylko część czynności przedstawiona w sieci, z określonym prawdopodobieństwem większym od zera, bierze udział w realizacji przedsięwzięcia [7, s. 156–157].

[3] Przez przedsięwzięcie rozumie się zorganizowane działanie ludzkie zmierzające do osiągnięcia określonego celu, zawarte w skończonym przedziale czasu – z wyróżnionym początkiem i końcem – oraz zrealizowane przez skończoną liczbę osób, środków technicznych, energii, materiałów, środków finansowych i informacji [7, s. 156].

[4] Do kosztów bezpośrednich należą koszty robocizny, materiałów oraz koszty skrócenia czasu realizacji danej czynności. Oprócz kosztów bezpośrednich wyróżnia się koszty pośrednie, do których można zaliczyć m.in. koszty administracyjne, podatki, kary umowne związane z niedotrzymaniem ustalonego terminu wykonania pracy. Koszty pośrednie dotyczą przedsięwzięcia jako całości [2, s. 45]. Zob. http://www.netmba.com/operations/projet-cost/

[5] Czas graniczny jest definiowany jako najkrótszy możliwy ze względów technicznych i technologicznych czas na wykonanie danego działania [5, s. 83].

W niniejszej pracy przypomniane zostaną założenia algorytmu pozwalającego osiągnąć zamierzone cele oraz modele decyzyjne, dzięki którym możliwe jest uzyskanie rozwiązania optymalnego. Następnie autorka wykaże, że rozwiązania otrzymane odpowiednio za pomocą algorytmu i modelu optymalizacyjnego nie są w przypadku każdego analizowanego projektu zbieżne. W pracy będą brane pod uwagę jedynie koszty skracania czasu trwania czynności, które należą do kategorii kosztów bezpośrednich[6].

1. Wykorzystanie algorytmu CPM-COST do skrócenia czasu realizacji przedsięwzięcia

W analizie czasowo-kosztowej zakłada się, iż w celu przyspieszenia inwestycji opisanej siecią czynności należy wykonać następujące kroki:

1. Wyznaczyć podsieć krytyczną, czyli zbiór ścieżek, których czynności charakteryzują się zerowym całkowitym zapasem czasu[7].

2. Ustalić możliwe warianty (przekroje) skrócenia czasu trwania wszystkich ścieżek krytycznych o jedną jednostkę. Poszczególne warianty mogą polegać na:

a) skróceniu jednej czynności wspólnej dla wszystkich ścieżek krytycznych,

b) skróceniu po jednej czynności na każdej najdłuższej ścieżce [4, s. 303],

c) kombinacji dwóch pierwszych wariantów[8].

3. Przypisać wymienionym przekrojom łączne koszty skrócenia. Jeżeli skrócenie czasu trwania danej czynności jest technicznie niemożliwe, przyjmuje się, iż koszt związany z jej skróceniem jest równy bardzo dużej liczbie. Zależność czas-koszt dla danej czynności może być liniowa lub nieliniowa. Pierwszy typ zależności występuje wówczas, gdy koszt skrócenia czasu trwania czynności o każdą kolejną jednostkę jest stały. Koszt ten można wyznaczyć dzieląc różnicę pomiędzy kosztem granicznym[9] a kosztem normalnym przez różnicę pomiędzy czasem normalnym a czasem granicznym[10]. Wspomniana formuła ma sens, gdy koszt graniczny jest nie niższy od kosztu normalnego.

---

[6] Jeżeli rozpatruje się zarówno koszty bezpośrednie, jak i pośrednie, to postępowanie optymalizacji układu: czas trwania przedsięwzięcia – całkowite koszty realizacji określa się niekiedy kryptonimem MCX (*Minimum-Cost Expediting*) [5, s. 78–79].

[7] Całkowity zapas czasu czynności informuje, o ile maksymalnie można opóźnić moment jej rozpoczęcia lub wydłużyć jej czas trwania, aby czas realizacji całej inwestycji nie uległ zmianie. Jakiekolwiek wydłużenie czasu trwania czynności o zerowym całkowitym zapasie czasu (tzw. czynności krytycznej) powoduje zatem opóźnienie momentu zakończenia całego przedsięwzięcia.

[8] Jeżeli na przykład sieć krytyczna składa się z trzech ścieżek: I, II, III, to można skrócić czynność wspólną dla ścieżek I i III oraz jeszcze jedną czynność, która znajduje się tylko na ścieżce II.

[9] Koszt graniczny to koszt, który towarzyszy czasowi granicznemu.

[10] Zob. http://www.netmba.com/operations/projet-cost/ i por. [5, s. 87].

4. Wybrać najtańszy wariant i skrócić czas trwania wybranych czynności o jedną jednostkę[11].

5. Sprawdzić, czy cel został osiągnięty[12]. Jeżeli nie, przejść do kroku 6.

6. Sprawdzić, czy pojawiła się nowa ścieżka krytyczna (bądź nowe ścieżki krytyczne)[13].

a) Jeżeli tak, wyznaczyć nową podsieć krytyczną[14] i powrócić do kroku 2.

b) Jeżeli nie, powrócić do kroku 3 itd.

Opis całego zaprezentowanego algorytmu kompresji sieci można znaleźć m.in. w pracach [1], [3, s. 254–255] i [7, s. 165–166]. Autorzy tychże prac proponują najpierw zestawić czynności krytyczne, podać ich gradienty kosztów[15] oraz czasy graniczne, wyeliminować z zestawienia te czynności krytyczne, dla których średni gradient kosztów nie istnieje (tzn. normalny czas trwania czynności jest równy czasowi granicznemu), a następnie proces skracania rozpocząć od czynności krytycznej o najniższym gradiencie kosztów. Autorzy podkreślają, iż przy skracaniu czasu trwania danej czynności mogą wystąpić dwa ograniczenia w postaci czasu granicznego tej czynności bądź pojawienia się nowej ścieżki krytycznej na skutek całkowitego wykorzystania zapasu czasu czynności niekrytycznej. Zdaniem autorów, gdy istnieją w sieci dwie ścieżki krytyczne lub więcej, należy skracać czas o tę samą wielkość na wszystkich ścieżkach krytycznych [7, s.166].

Posłużmy się prostym przykładem w celu zilustrowania działania powyższego algorytmu. Przedsięwzięcie to wymaga wykonania sześciu czynności w kolejności podanej na rys. 1. Litery oznaczają poszczególne czynności, wartości – ich normalne czasy trwania (w dniach), a wartości w nawiasach kwadratowych – koszty skrócenia danej czynności (w tys. zł) o każdy kolejny dzień. Liczba wartości w nich zawartych jest jednocześnie liczbą dni, o którą maksymalnie można skrócić czas trwania rozpatrywanej czynności. Brak nawiasu kwadratowego przy danym działaniu oznacza, iż jego skrócenie jest technicznie niemożliwe. W nawiasach okrągłych przy węzłach

---

[11] Por. [2, s. 51]: „Będziemy skracać iteracyjnie te czynności krytyczne, których skrócenie wymaga najmniejszego kosztu dodatkowego na jednostkę czasu w porównaniu z innymi czynnościami krytycznymi” oraz [2, s. 53]: „Skracając czas tych czynności krytycznych (lub podzbiorów czynności krytycznych), charakteryzujących się najmniejszymi kosztami krańcowymi (lub najmniejszą sumą – jeśli mamy w grafie więcej niż jedną drogę krytyczną)”.

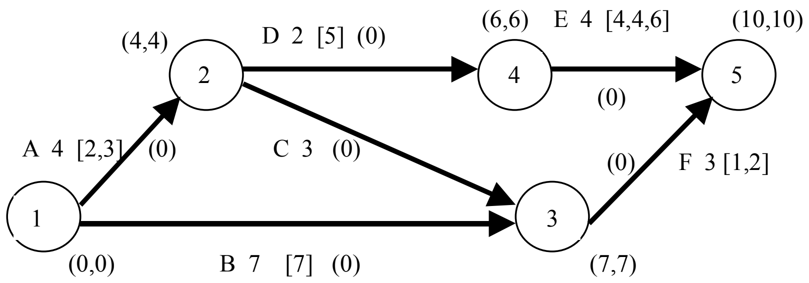
[12] Celem może być uzyskanie rozwiązania optymalnego zadania (1)–(2) lub (3)–(4).

[13] Por. [5, s. 82]: „W trakcie tego postępowania tworzą się zazwyczaj nowe ścieżki krytyczne, co może spowodować konieczność zbierania dalszych danych o zależności czas–koszt” oraz [2, s. 50]: „Takie postępowanie ma charakter iteracyjny, gdyż w trakcie obliczeń mogą powstać w grafie nowe drogi krytyczne”.

[14] Wystąpienie nowej ścieżki krytycznej jest bardzo prawdopodobne wówczas, gdy przed skróceniem w sieci znajdowały się drogi podkrytyczne, czyli ciągi czynności niekrytycznych wykazujące nieznaczne zapasy czasu.

[15] Autorzy nazywają gradientem kosztu stosunek różnicy pomiędzy kosztem granicznym a kosztem normalnym do różnicy pomiędzy czasem normalnym a czasem granicznym [7, s. 165].

podano najwcześniejsze możliwe i najpóźniejsze dopuszczalne momenty zajścia zdarzeń. Obliczone na podstawie momentów całkowite zapasy czasu czynności przedstawiono w nawiasach okrągłych obok łuków.



Rys. 1

Załóżmy, że należy ustalić czasy trwania poszczególnych czynności, kierując się poniższymi wytycznymi:

$$K \to \min\,, \tag{5}$$

$$T \le 8\,. \tag{6}$$

Dla normalnych czasów trwania czynności najkrótszy czas realizacji przedsięwzięcia wynosi 10 dni, przy czym wszystkie ścieżki w sieci (A-D-E, A-C-F, B-F) są krytyczne[16]. Aby warunek (6) był spełniony, sieć powinna zostać dwukrotnie skrócona o jednostkę. Spośród pięciu wariantów pozwalających skrócić czas trwania każdej ścieżki:

A + B (koszt: 2 + 7 = 9),
D + C + B (koszt: 5 + ∞ + 7 = ∞),
E + C + B (koszt: 4 + ∞ + 7 = ∞),
D + F (koszt: 5 + 1 = 6),
E + F (koszt: 4 + 1 = 5),

należy wybrać ostatnią kombinację. Po skróceniu czasu trwania czynności E i F odpowiednio do 3 i 2 dni, czas realizacji całego przedsięwzięcia będzie wynosić 9 dni, a łączny koszt skrócenia będzie równy 5 tys. zł.

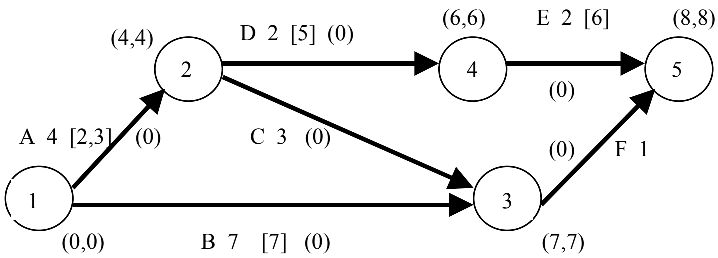
W związku z faktem, iż przyspieszenie inwestycji nie przyczyniło się do powstania nowej ścieżki krytycznej, lista możliwych kombinacji nie zmienia się. Zmianie ulegają jedynie niektóre koszty:

A + B (koszt: 2 + 7 = 9),
D + C + B (koszt: 5 + ∞ + 7 = ∞),
E + C + B (koszt: 4 + ∞ + 7 = ∞),

[16] Zostały one na rysunku pogrubione.

D + F (koszt: 5 + 2 = 7),
E + F (koszt: 4 + 2 = 6).

Okazuje się, że po raz drugi wariant ostatni jest najbardziej korzystny. Ostatecznie czynność E trwać będzie 2 dni, czynność F – 1 dzień, a całe przedsięwzięcie zostanie ukończone w ciągu 8 dni (rys. 2). Całkowity koszt skrócenia ukształtuje się na poziomie 11 tys. zł. Otrzymane rozwiązanie jest dopuszczalne, ponieważ spełnia warunek (6). Zgodnie z założeniami przedstawionego algorytmu, jest ono również optymalne, gdyż przy skracaniu czasu trwania przedsięwzięcia wybierano zawsze ten wariant, z którym związane były najniższe koszty.



Rys. 2

Przedstawiony przykład dotyczy minimalizacji kosztu przy zadanym czasie dyrektywnym. Stosowanie algorytmu w przypadku minimalizacji czasu przy zadanym koszcie przebiega bardzo podobnie. Skracanie należy zakończyć wówczas, gdy kolejne przyspieszenie wiąże się z przekroczeniem zadanego kosztu.

2. Wykorzystanie modelu optymalizacyjnego do skrócenia czasu realizacji przedsięwzięcia

W przypadku bardziej rozbudowanych sieci lub/i konieczności przeprowadzenia większej liczby iteracji wygodniej jest posłużyć się odpowiednio sformułowanym zadaniem programowania liniowego. Model minimalizujący czas przy zadanym koszcie przyjmuje następującą postać:

$$x_n \to \min\,, \tag{7}$$

$$y_{ij}^1 \geq y_{ij}^2 \geq \ldots \geq y_{ij}^{P_{ij}}\,, \tag{8}$$

$$x_j \geq t_{ij} - \sum_{p=1}^{P_{ij}} y_{ij}^p + x_i\,, \tag{9}$$

$$x_1 = 0\,, \tag{10}$$

$$\sum_{ij=1}^{m} \sum_{p=1}^{P_{ij}} k_{ij}^{p} y_{ij}^{p} \le K^*\,, \tag{11}$$

$$x_i, x_j \ge 0\,, \tag{12}$$

$$y_{ij}^{p} \in \{0,1\}\,. \tag{13}$$

W przypadku minimalizacji kosztu przy zadanym czasie należałoby rozwiązać zadanie (14)–(20).

$$\sum_{ij=1}^{m} \sum_{p=1}^{P_{ij}} k_{ij}^{p} y_{ij}^{p} \to \min, \tag{14}$$

$$y_{ij}^{1} \ge y_{ij}^{2} \ge \ldots \ge y_{ij}^{P_{ij}}\,, \tag{15}$$

$$x_j \ge t_{ij} - \sum_{p=1}^{P_{ij}} y_{ij}^{p} + x_i\,, \tag{16}$$

$$x_1 = 0\,, \tag{17}$$

$$x_n \le T^*\,, \tag{18}$$

$$x_i, x_j \ge 0\,, \tag{19}$$

$$y_{ij}^{p} \in \{0, 1\}, \tag{20}$$

gdzie:

x_i (x_j) – moment zaistnienia *i*-tego (*j*-tego) zdarzenia,
n – liczba zdarzeń,
y_{ij}^{p} – zmienna przyjmie wartość 1, gdy czynność *ij* zostanie skrócona po raz *p*-ty,
P_{ij} – maksymalna liczba jednostek, o którą skrócenie czasu trwania czynności *ij* jest możliwe (różnica między czasem normalnym a czasem granicznym),
t_{ij} – czas trwania czynności *ij*,
m – liczba czynności,
k_{ij}^{p} – koszt skrócenia po raz *p*-ty czynności rozpoczynającej się *i*-tym zdarzeniem i kończącej się zdarzeniem *j*-tym,
K^* – dostępne środki,
T^* – czas dyrektywny.

Model decyzyjny dla wcześniej omówionego przykładu wygląda następująco:

$$2y_A^1 + 3y_A^2 + 1000y_A^3 + 7y_B^1 + 1000y_B^2 + 1000y_C^1 + 5y_D^1 + 1000y_D^2$$

$$4y_E^1 + 4y_E^2 + 6y_E^3 + 1000y_E^4 + 1y_F^1 + 2y_F^2 + 1000y_F^3 \to \min, \tag{21}$$

$$\begin{array}{l} y_A^1 \geq y_A^2 \geq y_A^3 \\ y_B^1 \geq y_B^2 \\ y_D^1 \geq y_D^2 \\ y_E^1 \geq y_E^2 \geq y_E^3 \geq y_E^4 \\ y_F^1 \geq y_F^2 \geq y_F^3 \end{array}, \tag{22}$$

$$\begin{array}{l} x_2 \geq 4 - y_A^1 - y_A^2 - y_A^3 + 0 \\ x_3 \geq 7 - y_B^1 - y_B^2 + 0 \\ x_3 \geq 3 - y_C^1 + x_2 \\ x_4 \geq 2 - y_D^1 - y_D^2 + x_2 \\ x_5 \geq 4 - y_E^1 - y_E^2 - y_E^3 - y_E^4 + x_4 \\ x_5 \geq 3 - y_F^1 - y_F^2 - y_F^3 + x_3 \end{array}, \tag{23}$$

$$x_1 = 0, \tag{24}$$

$$x_5 \leq 8, \tag{25}$$

$$x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \tag{26}$$

$$y_A^1, y_A^2, \ldots, y_F^3 \in \{0,1\}. \tag{27}$$

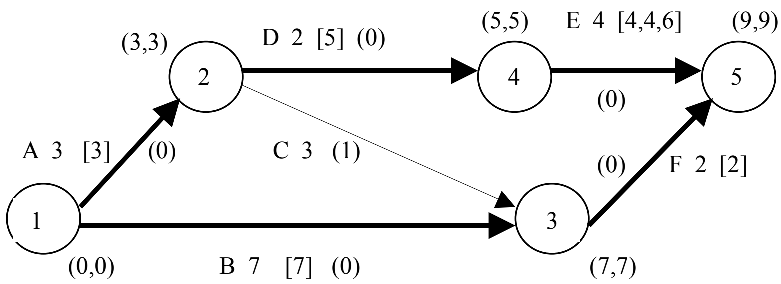
Optymalne wartości zmiennych będące rozwiązaniem zadania (21–27) są równe: $x_2 = 2$, $x_3 = 7$, $x_4 = 4$, $x_5 = 8$, $y_A^1 = 1$, $y_A^2 = 1$, $y_F^1 = 1$, $y_F^2 = 1$. Pozostałe zmienne y_{ij}^p przyjęły zerowe wartości. Wartość zmiennej x_5 sugeruje, iż warunek (6) zadania (5)–(6) został spełniony. Po podstawieniu obliczonych wartości zmiennych do funkcji celu okazuje się, że jest ona równa 8 tys. zł. Obserwacja ta daje z jednej strony powód do niepokoju, ponieważ otrzymany wynik jest zupełnie inny od tego, który uzyskaliśmy, stosując wcześniej omówiony algorytm dla metody ścieżki krytycznej. Z drugiej strony, wartość funkcji celu może decydenta ucieszyć, gdyż oznacza ona, iż skrócenie czasu realizacji inwestycji do 8 dni może kosztować nie 11, lecz 8 tys. zł, czyli aż o 3 tys. zł mniej!

Wyprowadzone przez autorkę modele (7)–(13) i (14)–(20) mają zastosowanie wtedy, gdy koszty skrócenia danej czynności nie są stałe, a zmiany ich czasu trwania mają charakter dyskretny. W pracy [8, s. 313–317] można znaleźć odpowiednie modele uproszczone wykorzystywane w sytuacji, gdy koszt skrócenia czynności o każdą jej kolejną jednostkę czasu jest taki sam. Wówczas każdej czynności przypisana jest tylko jedna zmienna y_{ij}, której końcowa wartość oznacza liczbę jednostek czasu, o jaką należy skrócić daną czynność. Znikają zatem warunki (8) i (15), a zmienne y_{ij} mogą przyjmować wartości naturalne nieprzekraczające zadanego poziomu stanowiącego różnicę między czasem normalnym a czasem granicznym.

3. Analiza porównawcza algorytmu i modelu optymalizacyjnego

Uzyskanie różnych wyników pociąga za sobą potrzebę wyjaśnienia przyczyny zaobserwowanej nieprawidłowości. Przypomnijmy, że w metodzie ścieżki krytycznej okazało się, iż w pierwszej i drugiej iteracji należało za każdym razem skrócić czas trwania dwóch tych samych czynności: E oraz F. Po pierwszym etapie koszt wyniósł 5 tys. zł, a po drugim – dodatkowe 6 tys. zł. Z kolei wyniki wygenerowane przez komputer na podstawie modelu optymalizacyjnego sugerują, iż wystarczyło dwukrotnie skrócić czynności A i F. Pierwsze skrócenie tej pary wiąże się z kosztem wynoszącym 3 tys. zł, a drugie – z dodatkowymi 5 tys. zł. Pytanie, jakie się nasuwa, jest oczywiste: Dlaczego algorytm nie podsunął takich rozwiązań? Odpowiedź brzmi: Ponieważ wariantu A + F nie było wśród rozpatrywanych.

Kombinacja A + F jest bardzo interesującym sposobem skrócenia czasu realizacji inwestycji o jednostkę. W wyniku skrócenia powyższych czynności liczba ścieżek krytycznych zmaleje (rys. 3)! Pozostaną dwie najdłuższe ścieżki: A-D-E oraz B-F. Czynność C przestanie być krytyczna, ponieważ jej całkowity zapas czasu będzie równy 1.



Rys. 3

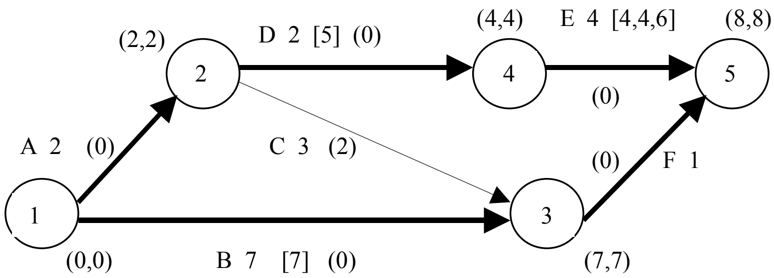
Wariant A + F nie został wcześniej wymieniony, gdyż zakłada on skrócenie czasu trwania każdej najdłuższej drogi niekoniecznie o dokładnie jedną jednostkę. Spośród kombinacji skracających wszystkie ścieżki krytyczne przynajmniej raz, wariant ten jest również jedyną racjonalną kombinacją. Zauważmy bowiem, że przykładowy wariant

D + C + F także pozwala przyspieszyć czas trwania każdej najdłuższej ścieżki o co najmniej jedną jednostkę czasu, lecz zawiera czynność C, której skrócenie jest zbędne, ponieważ akceleracja dwóch pozostałych czynności jest zupełnie wystarczająca.

Chcąc skrócić przedsięwzięcie o kolejny dzień, decydent powinien wybrać jeden z następujących wariantów:

A + B (koszt: 10),
A + F (koszt: 5),
D + B (koszt: 12),
D + F (koszt: 7),
E + B (koszt: 11),
E + F (koszt: 6).

Wybór znów padnie na wariant A + F (rys. 4).

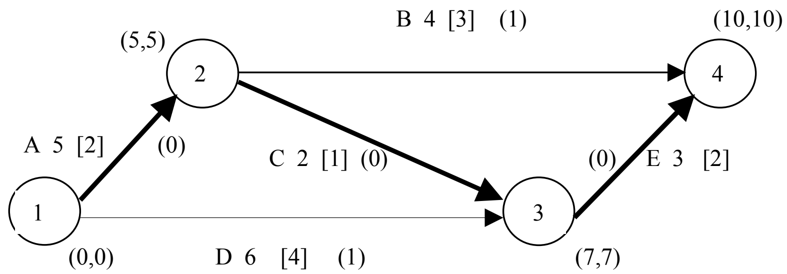


Rys. 4

Opisany w rozdziale pierwszym algorytm wygenerował mniej korzystne rozwiązanie aniżeli model optymalizacyjny, ponieważ ten pierwszy analizował jedynie te warianty, które powodowały skrócenie czasu trwania wszystkich ścieżek krytycznych o *dokładnie* jedną jednostkę. Tymczasem okazuje się, że do listy kombinacji należy dołączyć warianty, które pozwalają skrócić wszystkie ścieżki krytyczne o *przynajmniej* jedną jednostkę!

4. Jeszcze jeden paradoks …

Na zakończenie przyjrzyjmy się jeszcze jednej sytuacji. Załóżmy, że planowane przedsięwzięcie zostanie zrealizowane po zakończeniu pięciu czynności (rys. 5). Tym razem koszty skrócenia są stałe, a czasy graniczne wynoszą odpowiednio 2, 1, 1, 3, 1. Najkrótszy czas realizacji przedsięwzięcia przy normalnych czasach trwania czynności wynosi 10 jednostek (np. tygodni), przy czym sieć składa się z jednej ścieżki krytycznej A-C-E.



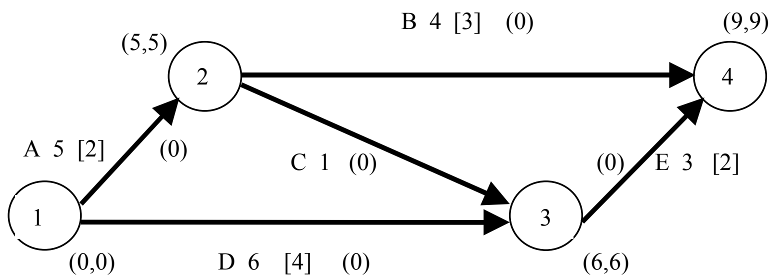
Rys. 5

Przyjmijmy, iż celem decydenta jest znalezienie rozwiązania spełniającego warunki (28)–(29):

$$K \to \min, \tag{28}$$

$$T \leq 8. \tag{29}$$

Mając na uwadze wnioski wyciągnięte w rozdziale 3, dołączmy do listy rozpatrywanych wariantów ewentualne dodatkowe racjonalne kombinacje zapewniające przyspieszenie inwestycji, lecz niekoniecznie poprzez skrócenie wszystkich najdłuższych ścieżek dokładnie raz. W pierwszej iteracji można przyspieszyć czynności A, C lub E. Zgodnie z krokiem 4 decydent wybierze czynność C (rys. 6).



Rys. 6

Następnie ustali możliwe warianty skrócenia trzech najdłuższych ścieżek:

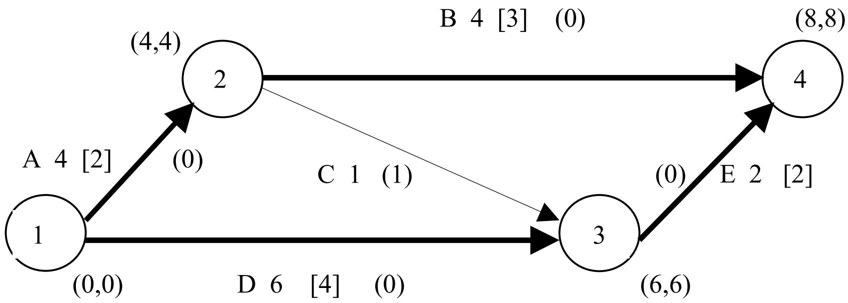
A + D (koszt: 6),

A + E (koszt: 4),

B + C + D (koszt: ∞),

B + E (koszt: 5),

i skróci czasy trwania czynności A i E (rys. 7).



Rys. 7

Czas realizacji przedsięwzięcia wyniesie wówczas 8 tygodni, a łączny koszt skrócenia będzie równy 1 + 2 + 2 = 5 j.p.

W przypadku tego przykładu moglibyśmy mieć pewność, że otrzymane rozwiązanie jest optymalne, ponieważ lista wariantów do wyboru została odpowiednio rozszerzona. Rozwiązując jednak poniższe zadanie:

$$2y_A + 3y_B + 1y_C + 4y_D + 2y_E \to \min\,, \tag{30}$$

$$\begin{aligned} y_A &\le 5-2 \\ y_B &\le 4-1 \\ y_C &\le 2-1\,, \\ y_D &\le 6-3 \\ y_E &\le 3-1 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} x_2 &\ge 5 - y_A + 0 \\ x_3 &\ge 6 - y_D + 0 \\ x_3 &\ge 2 - y_C + x_2\,, \\ x_4 &\ge 4 - y_B + x_2 \\ x_4 &\ge 3 - y_E + x_3 \end{aligned} \tag{32}$$

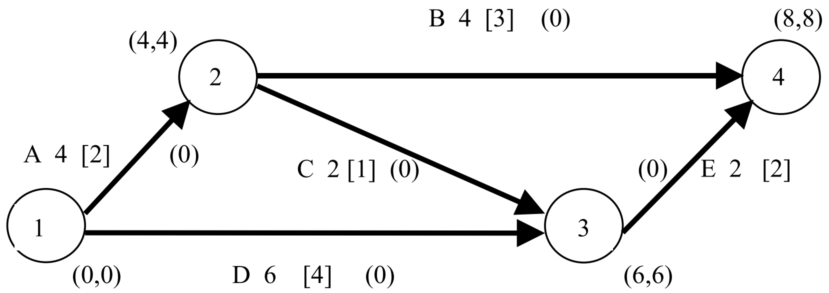
$$x_1 = 0\,, \tag{33}$$

$$x_4 \le 8\,, \tag{34}$$

$$x_2, x_3, x_4 \ge 0\,, \tag{35}$$

$$y_A, y_B, y_C, y_D, y_E \in N \tag{36}$$

okazuje się, że wystarczy najpierw skrócić czynność A, a w drugiej iteracji czynność E (lub odwrotnie), aby spełnić warunek (34), przy czym całkowity koszt wyniesie jedynie 2 + 2 = 4 j.p. (rys. 8).



Rys. 8.

Po raz kolejny opisany algorytm nie pozwolił nam wyznaczyć optymalnego rozwiązania. W rozdziale 3 niniejszej pracy zakwestionowano drugi krok opisanego algorytmu. Na podstawie drugiego przykładu można dojść do wniosku, iż krok 4 staje się w pewnych sytuacjach również zawodny. Wybór każdorazowo najtańszego wariantu nie musi prowadzić do optimum. Oczywiście, gdyby decydentowi zależało na przyspieszeniu inwestycji tylko o jeden tydzień, rozwiązania wygenerowane dla tego przykładu przez algorytm i model optymalizacyjny byłyby zbieżne. W obu przypadkach należałoby skrócić czas trwania czynności C.

Podsumowanie

1. W pracach [1]–[5], [7] przyjmuje się, że przyspieszenie inwestycji powinno nastąpić poprzez skracanie najdłuższych ścieżek o jedną jednostkę. W opracowaniach zamieszczanych na stronach internetowych przez osoby prowadzące zarówno wykłady i ćwiczenia dla studentów z przedmiotów optymalizacyjnych, jak i szkolenia z zakresu zarządzania projektem (*Project Management*) można znaleźć następujące sformułowania: „Jeżeli występują dwie lub więcej ścieżek krytycznych w sieci, należy skracać czas o tę samą wielkość na wszystkich ścieżkach krytycznych”[17]. Okazuje się jednak, że nie dla każdej sytuacji decyzyjnej założenia algorytmu pozwalają otrzymać najlepsze rozwiązanie. Krok 2 opisanej metody poszukiwania optymalnego planu należy zatem przeformułować przez dodanie jednego istotnego słowa: „Ustalić

[17] Zob. gnu.univ.gda.pl/~jz oraz [3, s. 254–255] i [7, s. 166].

możliwe warianty skrócenia czasu trwania wszystkich ścieżek krytycznych o *przynajmniej* jedną jednostkę.

2. Niektóre opracowania dydaktyczne są zaopatrzone w komentarz o następującej bądź zbliżonej treści: „Należy zwrócić szczególną uwagę na ścieżkę krytyczną i upewnić się, czy po przyspieszeniu inwestycji o jedną jednostkę rozpatrywana ścieżka pozostanie krytyczna”[18]. Wniosek ten stanowi niejako potwierdzenie konieczności wyboru wariantu nie tylko spośród kombinacji zakładających skrócenie ścieżek krytycznych o dokładnie jedną jednostkę. Jeżeli decydent ograniczy się jedynie do tych ostatnich, przy skracaniu czasu realizacji przedsięwzięcia o każdą kolejną jednostkę, liczba ścieżek krytycznych będzie co najwyżej wzrastać, gdyż raz ustalona ścieżka krytyczna zachowa swoje zerowe całkowite zapasy czasu w każdej iteracji. Jeżeli natomiast do listy możliwych kombinacji dołączą warianty skracające najdłuższe ścieżki przynajmniej raz, okaże się, że niektóre drogi krytyczne przestaną być najdłuższe, ponieważ zostaną one skrócone w dwóch miejscach. Modyfikacja kroku 2 omówionego algorytmu pociąga więc za sobą zmiany również w kroku 6.

3. Przykład drugi omówiony w rozdziale czwartym wyraźnie pokazuje, że krok 4 sugerujący wybór najtańszej kombinacji może również przeszkodzić decydentowi w wyznaczeniu planu optymalnego. Niezwykle istotnym parametrem w zadaniu jest bowiem czas dyrektywny T^*. Jeżeli decydentowi zależy tylko na jednokrotnym skróceniu czasu realizacji przedsięwzięcia, może on jak najbardziej kierować się przy wyborze odpowiedniego wariantu kryterium minimalizacji kosztu. Jeżeli natomiast decydent zamierza przyspieszyć inwestycję o kilka jednostek, powinien on spojrzeć na problem całościowo, co w przypadku bardzo rozbudowanych sieci może się okazać dość trudne. Owa trudność wynika z faktu, iż analiza czasowo-kosztowa posiada cechy charakterystyczne dla programowania dynamicznego.

4. Przeprowadzone analizy wykazały, że zarówno przy nieliniowej jak i przy liniowej zależności między czasem trwania danej czynności a kosztem związanym z jego skróceniem wyniki generowane przez algorytm i model optymalizacyjny niekiedy są różne, przy czym ten drugi zawsze zapewnia uzyskanie rozwiązania optymalnego.

5. Zauważmy, że sieci, na podstawie których wykazano, iż stosowanie algorytmu może być zawodne, mają dość specyficzną strukturę: zawierają ścieżkę krytyczną (podkrytyczną) posiadającą czynności wspólne parami z innymi ścieżkami krytycznymi (podkrytycznymi). Wykorzystane modele sieciowe, z uwagi na liczbę czynności i zależności między nimi można jednak uznać za bardzo proste. W praktyce natomiast struktura przedsięwzięcia może się okazać znacznie bardziej złożona. Wówczas ustalenie wszystkich możliwych kombinacji zgodnie z założeniami algorytmu zabiera więcej czasu. Zwiększa się również ryzyko przeoczenia niektórych wariantów, w tym najbardziej opłacalnej kombinacji. Co więcej, stosowanie omówionego algorytmu komplikuje się, gdy różnica między normalnym czasem realizacji przedsięwzięcia

[18] Zob. http://www.netmba.com/operations/projet-cost/

a czasem dyrektywnym jest duża, ponieważ po każdej iteracji należy na nowo ustalić podsieć krytyczną wraz ze zbiorem kombinacji. Skoro algorytm nie gwarantuje uzyskania rozwiązania optymalnego, każdej kolejnej iteracji może więc towarzyszyć coraz większe odchylenie między wynikiem otrzymanym a optymalnym! Duża złożoność czasowa metody, która na dodatek może nie doprowadzić do najlepszego możliwego rozwiązania, tym bardziej pozwala autorce zakwestionować sens jej stosowania.

6. Aby można było CPM-COST nazwać algorytmem, metoda powinna mieć jasno określone kryterium stopu i osiągać rozwiązanie spełniające to kryterium po skończonej liczbie kroków. Niedoskonałość zaprezentowanego algorytmu wynika z faktu, iż każdą kolejną iterację traktuje jako odrębne zadanie. Sprecyzowanie założeń opisanych w rozdziale pierwszym sprawi, że staną się one uniwersalne. Możliwe będzie wówczas otrzymanie takich samych wyników niezależnie od przyjętego sposobu rozwiązywania problemu, a osoby nadzorujące realizację przedsięwzięcia inwestycyjnego będą mogły wyznaczyć jeszcze mniej kosztowny plan jego wcześniejszego zakończenia.

Bibliografia

[1] BLADOWSKI S., *Metody sieciowe w planowaniu i organizacji pracy*, PWE, Warszawa 1970.

[2] GEDYMIN O., *Metody optymalizacji w planowaniu sieciowym*, PWN, Warszawa 1974.

[3] GRUCZA B., OGONEK K., TROCKI M., *Zarządzanie projektami*, PWE, Warszawa 2003.

[4] GUZIK B. (red.), *Ekonometria i badania operacyjne*, MD 51, AE, Poznań 1999.

[5] IDŹKIEWICZ A.Z., *PERT. Metody analizy sieciowej*, PWN, Warszawa 1967.

[6] IGNASIAK E., *Teoria grafów i planowanie sieciowe*, PWE, Warszawa 1982.

[7] JĘDRZEJCZYK Z., KUKUŁA K., SKRZYPEK J., WALKOSZ A., *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, PWN, Warszawa 1996.

[8] TRZASKALIK T., *Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem*, PWE, Warszawa 2003.

Time-cost analysis (CPM-COST). Algorithm versus optimization model

The author of this paper analyses examples of network diagrams presenting different projects. The target consists in compressing the project schedule to a time desired and minimizing direct costs. On the basis of these case studies the author shows how both, i.e., 1) the algorithm based on the critical path method with a time-cost analysis and 2) the optimization models, generate each iteration to finally determine the best solution. However, the results obtained are different. In this connection, the steps of the algorithm are demonstrated in order to proof that some of its assumptions are not entirely defined in a proper way. It turns out that the project accelerating 1) by shortening each critical path by exactly one unit and 2) by selecting the cheapest combination of critical activities, may not necessarily lead to the optimal solution. At the end of the paper two modified assumptions are proposed.

Key words: *CPM-COST, critical path method, time-cost analysis, optimization model, crash time, desirable time, linear and non-linear relationship between time and cost, project duration*